# ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА ТА ЕРГОНОМІКА

УДК 514.177.2
DOI https://doi.org/10.32782/2663-5941/2023.3.2/01

***Максимов І.І.***
Криворізький національний університет

***Слободянюк В.К.***
Криворізький національний університет

***Максимова І.І.***
Державний університет економіки і технологій

## АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ТОЧКИ ФЕРМА-ТОРРІЧЕЛЛІ ТА МІНІМІЗАЦІЯ ТРАНСПОРТНОЇ РОБОТИ

*В математиці відома точка Ферма-Торрічеллі, яка забезпечує мінімальну відстань до вершин трикутника. Універсальна аналітична формула визначення координат точки Ферма-Торрічеллі для довільного опуклого багатокутника на теперішній час не знайдена. Але рішення можливо отримати для симетричних багатокутників.*

*Метою даної роботи є розробка методологічної основи для визначення координат точки мінімуму транспортної роботи та дослідження впливу на цю точку розташування вершин багатокутника.*

*У статті надано огляд сучасних досліджень, в яких для мінімізації логістичних процесів застосовуються алгоритми з використанням точки Ферма-Торрічеллі. У роботі використані методи математичної оптимізації та аналітичної геометрії. Методами аналітичної геометрії встановлені формули для визначення координат оптимальної точки звезення для кількості точок n=3 та n=4.*

*Для потреб багатьох галузей науки та техніки практичне значення має розробка методу, що дозволяє спрогнозувати вплив нерівноважених точок на положення точки, що забезпечує мінімум транспортної роботи. Прикладом такої задачі є пошук оптимального розміщення переробного підприємства, на яке з кількох точок доставляється однаковий (рівнозважені точки) або різний (нерівнозважені точки) обсяг сировини. При цьому мінімізується загальний обсяг транспортної роботи з доставки сировини. Показано, що центр ваги не завжди збігається з точкою Ферма-Торрічеллі, а може бути використаний тільки як попереднє рішення задачі.*

*Для нерівнозважених точок не існує геометричних методів розв'язку. Але запропонований в даній роботі метод дозволяє знайти координати оптимальної точки як для рівнозважених , так і нерівнозважених точок. Крім того, проведено дослідження по зміні об'єму транспортної роботи при відхиленні точки звезення від оптимальної точки Ферма-Торрічеллі, що не можливо зробити геометричними методами. Дослідженнями встановлені умови, при яких одна з нерівнозважених точок буде оптимальною.*

***Ключові слова:*** *точка Ферма-Торрічеллі, координати оптимальної точки, мінімізація транспортної роботи, нерівнозважені вершини, центр ваги.*

**Проблема та її зв'язок з науковими та практичними завданнями.** Для багатьох галузей науки та техніки практичне значення має розробка методу, що дозволяє спрогнозувати вплив розташування вершин багатокутника на положення внутрішньої точки, що забезпечує мінімум транспортної роботи. Ця проблема виникає при обґрунтуванні оптимального положення перевантажувальних пунктів, при рішенні логістичних задач, при розробці економіко-математичних моделей. Аналіз проектних рішень в гірничо-металургійній промисловості свідчить, що положення об'єктів переробного комплексу відносно сировинної бази визначається без достатнього теоретичного обґрунтування [1–4]. В теорії ще немає загального і повного рішення задачі оптимізації положення точки звезення, що забезпечує мінімум транспортної роботи.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Задача оптимізації положення транспортних комунікацій представляє великий інтерес з теоретичної та практичної точок зору і є однією з класичних наукових проблем. Вперше задача визначення оптимальної точки звезення була поставлена П'єром Ферма [5, 6, 10] наступним чином: «для трьох заданих точок знайти четверту, таку, що якщо від неї провести прямі лінії до даних точок, сума відстаней буде найменшою». Розв'язком цієї задачі займалося багато дослідників. Вважається, що вперше рішення цієї задачі для трьох точок дано Е. Торрічеллі і В. Вівіані. Рішення задачі було отримане фізичними методами – оптимальною точкою для трикутника є така точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120°. Дана точка називається точкою Ферма-Торрічеллі. Якщо один із кутів трикутника ***ABC*** більше 120°, то відповідна вершина є точкою Ферма-Торрічеллі. В XIX столітті були знайдені та обґрунтовані (Якоб Штейнер) геометричні методи розв'язання цієї задачі [5–9] (рис. 1). Для знаходження точки Ферма-Торрічеллі (точка ***T***) на сторонах даного трикутника будуємо допоміжні правильні трикутники (трикутники Наполеона). Точку Т можна знайти як точку перетину кіл, описаних навколо трикутників Наполеона, або ліній Сімпсона (AA', BB', CC'). Для знаходження точки ***T*** достатньо побудувати будь-які дві з зазначених вище ліній. В 1834 р. Ф. Хайнен довів, що довжини цих відрізків дорівнюють сумі відстаней від точки Ферма-Торрічеллі до вершин даного трикутника.

$$AA' = BB' = CC' = TC + TB + TA$$

$$\angle BTC = \angle BTA = \angle CTA = 120°$$

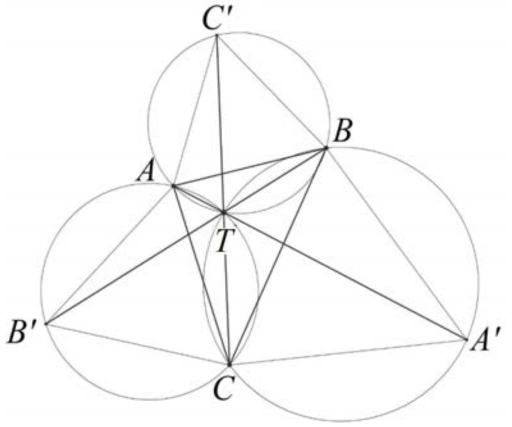


**Рис. 1. Геометричне рішення задачі визначення точки Ферма-Торрічеллі для трикутника**

В такому вигляді ми маємо геометричну задачу, яку можна розв'язати за допомогою циркуля та лінійки. Але при розв'язанні багатьох прикладних задач необхідно знаходити координати оптимальної точки Ферма-Торрічеллі.

Для чотирьох точок рішення задачі визначення точки Ферма-Торрічеллі було знайдено італійським інженером і математиком Фаньяно: для опуклого чотирикутника мінімум суми відстаней досягається в точці перетину діагоналей.

Великий внесок у розвиток методу знаходження оптимальних точок звезення вніс Якоб Штейнер (1796–1863) [9]. Для кількості точок, більшої за чотири, він заклав основи створення теорії оптимальних мереж. Їм особисто були розглянуті тільки деякі окремі випадки, а теорії графів і логістики були розвинені в XIX і на початку XX століття (Р.Курант, 1888–1972 рр.) [9].

Для спрощення рішення логістичних задач в якості точки Ферма-Торрічеллі іноді використовують точку центру ваги. Але збіг цих точок можливий для правильних і окремих видів багатокутників. Відомі алгоритми визначають точку Ферма-Торрічеллі геометричними методами. Але практичне значення має розробка методу, що дозволяє знаходити координати оптимальної точки звезення для багатокутника при відомих координатах його вершин з урахуванням вагових коефіцієнтів.

**Постановка завдання.** Метою даного дослідження є розробка методологічної основи для аналітичного визначення точки Ферма-Торрічеллі для кількості вершин, що не перевищує чотири.

**Викладення матеріалу та результати.** За допомогою геометричного методу проведемо дослідження закономірностей взаємного розташування точок ***P*** (центр ваги) і ***T*** (точка Ферма-Торрічеллі) при зміні геометрії трикутників (рис. 2).

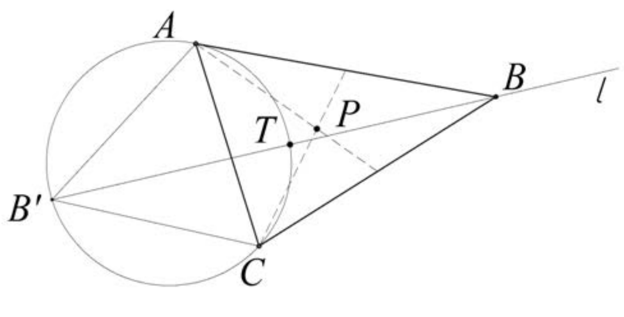


**Рис. 2. Особливості взаємного розміщення точок T (точка Ферма-Торрічеллі) і P (центр ваги) при зміні геометрії трикутників**

Розглянемо довільний трикутник ***ABC***. На стороні ***AC*** для визначення допоміжної точки ***B'*** побудуємо рівносторонній трикутник ***AB'C***. Навколо трикутника ***AB'C*** описуємо коло. Відомо, що точка ***T*** завжди лежить на дузі ***AC***. На перетині дуги ***AC*** та відрізка ***BB'*** знаходимо шукану точку ***T***. Центр ваги знаходимо як точку перетину медіан трикутника ***ABC***. Якщо вершина ***B*** буде віддалятися від сторони ***AC*** уздовж променя ***l***, то також буде зміщуватися центр ваги трикутника (точка P), але положення точки ***T*** залишається незмінним. Таким чином, ми показали, що центр ваги не завжди збігається з точкою Ферма-Торрічеллі, а може бути використаний тільки як попереднє рішення задачі.

Для знаходження координат точки Ферма-Торрічеллі довільного трикутника ще не знайдені зручні формули. Відсутність формул ускладнює виконання досліджень з економіко-математичної оптимізації логістичних схем. Знаходження координат оптимальної точки звозу залишається актуальною задачею [10].

Для рівнобедрених трикутників знайти координати точки Ферма-Торрічеллі можна за рахунок вибору відповідної системи координат (центр системи координат в середині основи, позитивний напрямок осі OX вздовж висоти трикутника (рис. 3)).

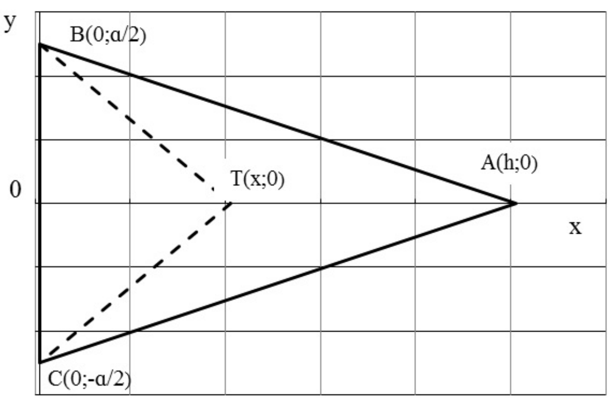


**Рис. 3. Схема для визначення координат точки Ферма-Торрічеллі**

Основу рівнобедреного трикутника CB приймемо рівною ***a***; а висоту OA – *h*. При такому виборі системи координат точка Ферма-Торрічеллі розташовується на осі OX і залишається знайти тільки одну координату. Для довільної точки T ($x$; 0) сума відстаней до вершин трикутника дорівнює:

$$F(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + (h - x) \qquad (1)$$

Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо координати оптимальної точки:

$$X_T = \frac{a\sqrt{3}}{6} \approx 0,289 \cdot a \qquad (2)$$

Для рівнобедреного трикутника точка Ферма-Торрічеллі лежить на висоті на відстані $x = a\sqrt{3}/6$ від середини основи. Ця відстань залежить тільки від величини основи і не залежить від висоти трикутника. Графік функції (1) має асимптоту y = x + h (рис. 4). Графік побудований для h=2a. При іншому значенні висоти, графік функції та його асимптота мають однакову форму. Найменша сума відстаней від вершин трикутника дорівнює $h + a\sqrt{3}/2$ при $x = a\sqrt{3}/6$. На проміжку x ϵ [0; 2a/3] сума залишається меншою $h + a$, а при x> 2a/3 зростає пропорційно збільшенню x (тангенс кута нахилу дотичної дорівнює одиниці).

Цей метод також можна застосувати для трикутника з нерівнозваженими вершинами. Така задача виникає у випадку пошуку оптимального розміщення переробного підприємства, на яке з трьох точок надходять різні обсяги сировини [8].

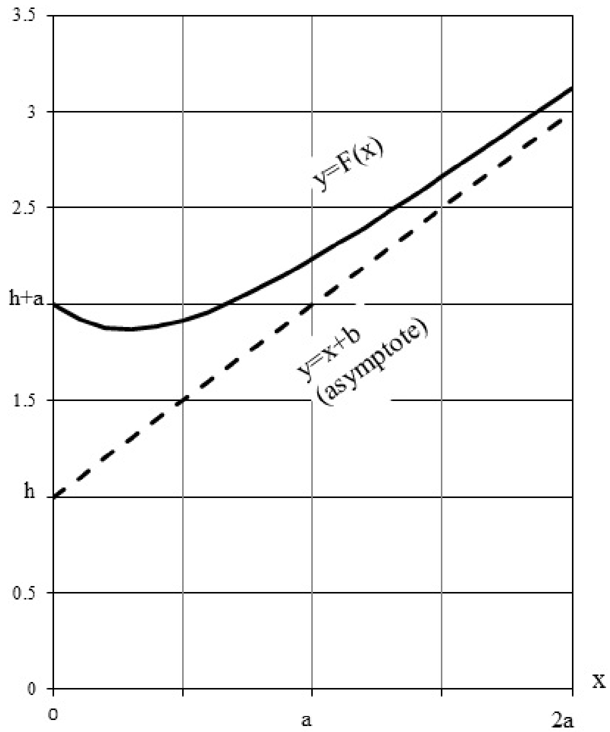


**Рис. 4. Зміна суми відстаней до вершин трикутника при віддаленні точки T**

Розглянемо випадок, коли з точки A надходить обсяг сировини $Q_A = K \cdot Q$, де $Q = Q_C = Q_B$ – обсяг сировини, що надходить з точок C і B. Необхідно знайти мінімум функції, що визначає загальний обсяг транспортної роботи

$$F(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + K(h - x) \qquad (3)$$

Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо координату оптимальної точки T

$$X_T = \frac{K \cdot a}{2\sqrt{4 - K^2}} \qquad (4)$$

Якщо $K$ = 1, значення формули (4) співпадає з формулою (3). При $K$>1 координата оптимальної точки також не залежить від висоти трикутника. Координата точки $T$ залежить від основи (α) та коефіцієнта перевищення об'єму сировини для вершини А, $K = Q_A/Q$.

При $K$<1, одержуємо значення $x_T < a\sqrt{3}/6$. Наприклад, якщо $K$ = 0,5 з $x_T = a / 2 \cdot \sqrt{15} \approx 0{,}129 \cdot a$. При цьому кут ∠ ВТС ≈ 151° (більше 120°, що відповідає К = 1). Якщо $K$>1, то $x_T > a \cdot \sqrt{3} / 6$ (∠ВТС < 120°), оптимальна точка $T$ наближається до вершини $A$.

У випадку нерівнозважених точок трикутника геометричні методи знаходження оптимальної точки звозу не працюють. Розв'язати цю задачу можна тільки з використанням фізичної моделі. В деякому масштабі на площині будують трикутник АВС. В вершинах трикутника роблять отвори, через які пропускають шнури. Кінці шнурів зв'язують, вузол розміщують зверху на поверхні площини. До нижніх кінців шнурів прив'язують ваги, пропорційні обсягам перевезень $Q_A$; $Q_B$; $Q_C$. Врівноважене положення вузла відповідає розміщенню оптимальної точки звозу. При проходженні вузла в один з отворів, відповідна вершина є оптимальною точкою. Досліди показують, що вершина трикутника буде оптимальною точкою, якщо відповідна вага буде дорівнювати сумі двох інших, в деяких дослідах трохи менше суми двох інших. Але, враховуючи сили тертя та недосконаліть моделі, цей висновок можна вважати наближеним (орієнтовним).

З формули (4) слідує, що при К → 2, х → ∞ може стати більшим будь-якого значення h. Відтак вершина $A$ може стати оптимальною при К меньшому 2. Підставляємо в формулу (4) значення $x = h$ і знаходимо К:

$$K_A = \frac{2 \cdot h}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}} \qquad (5)$$

З формули (5) випливає обернена залежність, при h → ∞; К → 2. Тобто, чим більш віддалена від основи вершина А, тим більше значення К = QA/Q, при якому ця вершина є оптимальною точкою. При $h = a \cdot \sqrt{3} / 2$ (трикутник рівносторонній) $K = \sqrt{3} \approx 1{,}73$. Вершина А стає оптимальною при умові, що QA на 73% перевищує Q = QC = QB. Якщо h=a /2, то $K = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. При $h = a \cdot \sqrt{3} / 6$ (кут при вершині А дорівнює 120°) К = 1. Якщо, h=a, то $K = 0{,}8 \cdot \sqrt{5} \approx 1{,}79$; якщо h=2 a, то К ≈ 1,94 (∠А ≈ 28°; ∠С = ∠В ≈ 76°).

На рис. 4 наочно показаний характер зміни коефіцієнта К при збільшенні h.

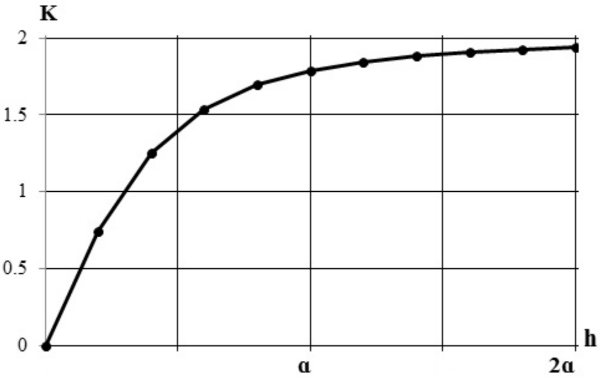


**Рис. 5. Зміна коефіцієнта *К* при збільшенні висоти рівнобедреного трикутника**

На рис. 6 показаний характер зміни сумарної транспортної роботи (К=2) для різних точок висоти трикутника.

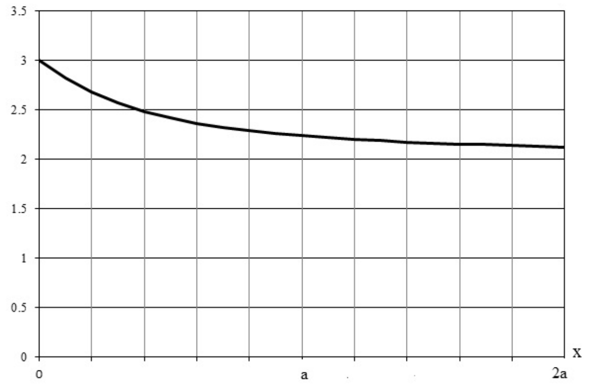


**Рис. 6. Зміна сумарного об'єму перевезень при двократному перевищенні $Q_A$ = 2Q**

При переміщенні точки звозу з початку координат до вершини А обсяг перевезень знижується на 30%. Порівняння графіків на рис. 4 та рис. 6 показує, що для нерівнозважених вершин трикутника характер зміни сумарної транспортної роботи радикально змінюється.

З проведених досліджень можна зробити висновок про різні закономірності розміщення оптимальної точки Ферма-Торрічеллі для рівнозважених та нерівнозважених вершин трикутника.

Якщо точки рівнозважені, то координати оптимальної точки Т не змінюються при віддаленні вершини $A$. При $h \geq a \cdot \sqrt{3} / 6$ завжди $X_T = a \cdot \sqrt{3} / 6$ (∠А менше 120°). При $h \leq a \cdot \sqrt{3} / 6$ кут при вершині А стає ≥ 120° і ця вершина є оптимальною точкою Т.

Якщо точки різнозважені, то довільна точка висоти трикутника х ϵ (0 ; h] може бути оптимальною при відповідному значенні $K = 2x \Big/ \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$.

При збільшенні ***K*** від 1 до $2h\Big/\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}$ координата оптимальної точки збільшується від $X_1 = \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$ до $X_T = \cdot h$ (співпадає з вершиною А).

При К ϵ (0 ; 1]; $X_T \in \left(0; \cdot a\sqrt{3}/6\right)$. Якщо $h \le \cdot a \cdot \sqrt{3}/6$, то кут при вершині А ≥ 120°, але при $K < 2h\Big/\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$ оптимальною буде не вершина А (як при К=1), а внутрішня точка висоти.

Рішення задачі визначення оптимальної точки звезення для чотирьох точок простіше. Оптимальною точкою є точка перетину діагоналей чотирикутника. У справедливості теореми Фаньяно легко переконатись (рис. 7). Візьмемо довільну точку ***S*** всередині чотирикутника. Так як пряма коротше будь-якої ламаної, то сума відстаней від точки ***T*** до вершин чотирикутника буде більше, ніж для точки ***S***.

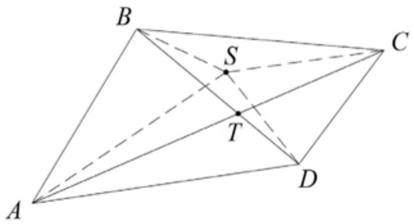


**Рис. 7. Визначення точки Ферма-Торрічеллі для чотирикутника**

Для більшої кількості точок геометричне рішення задачі визначення оптимальної точки не знайдене. Координати оптимальної точки звозу для чотирьох точок можна знайти як координати точки перетину діагоналей (рис. 8).

Знайдемо координати точки ***T*** при відомих координатах вершин чотирикутника.

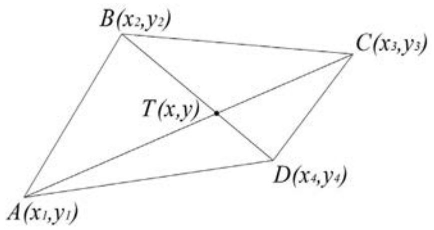


**Рис. 8. Схема до визначення координат оптимальної точки для чотирикутника**

Складемо рівняння діагоналей:
діагональ АС

$$\frac{y-y_3}{y_3-y_1}=\frac{x-x_3}{x_3-x_1} \quad ; \quad y-y_3=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\left(x-x_3\right) \qquad (6)$$

діагональ BD

$$\frac{y-y_4}{y_4-y_2}=\frac{x-x_4}{x_4-x_2} \quad ; \quad y-y_4=\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}\left(x-x_4\right) \qquad (7)$$

Координати оптимальної точки звозу для чотирьох точок знаходимо як рішення системи рівнянь (діагоналей ***AC*** і ***BD***):

$$x=\frac{\left(y_3x_1-y_1x_3\right)\times\left(x_4-x_2\right)-\left(y_4x_2-y_2x_4\right)\times\left(x_3-x_1\right)}{\left(y_3-y_1\right)\times\left(x_4-x_2\right)-\left(y_4-y_2\right)\times\left(x_3-x_1\right)} \qquad (8)$$

$$y=\frac{\left(x_3y_1-x_1y_3\right)\times\left(y_4-y_2\right)-\left(x_4y_2-x_2y_4\right)\times\left(y_3-y_1\right)}{\left(x_3-x_1\right)\times\left(y_4-y_2\right)-\left(x_4-x_2\right)\times\left(y_3-y_1\right)} \qquad (9)$$

Наведені формули дозволяють знайти координати оптимальної точки Т для довільного опуклого чотирикутника, якщо його вершини рівнозважені. Їх можна використовувати в економіко-математичних моделях та для оптимізації логістичних схем.

Цікавою особливістю є те, що координати оптимальної точки ***T*** не залежать від розмірів чотирикутника ***ABCD*** та його форми (кутів). Якщо видаляти одну або всі вершини уздовж прямих, що визначаються діагоналями чотирикутника, то положення точки ***T*** не змінюється.

Проведемо більш детальне дослідження для часткового випадку чотирикутників – ромба (одного з видів симетричних чотирикутників).

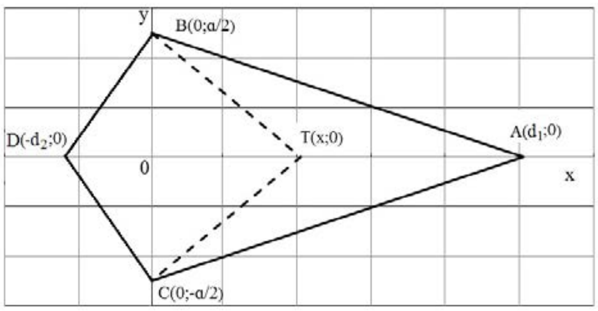


**Рис. 9. Схема для визначення координат оптимальної точки Ферма-Торрічеллі для ромба**

Нехай діагоналі ромба дорівнюють ВС = α та AD = d = $d_1$ + $d_2$ . Сума відстаней від довільної точки горизонтальної діагоналі Т(Х;0) до вершини ромба дорівнює:

$$F(x)=2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}+\left(d_1-x\right)+\left(d_2+x\right) \qquad (10)$$

Прирівнявши похідну до нуля, знаходимо *x*=0. Ми показали, що для рівнозважених вершин ромба оптимальною точкою Ферма-Торрічеллі є точка перетину діагоналей. Але ми можемо додатково дослідити як змінюється сума відстаней до вершин ромба (рис. 10) при віддаленні точки Т від початку координат (оптимальної точки).

$$F(x)=2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}+d; \quad \left(d=d_1+d_2\right) \qquad (11)$$

Елементарними перетвореннями можна показати, що функція (11) є рівнянням вертикальної гіперболи:

$$\frac{\left(y-d\right)^2}{a^2}-\frac{x^2}{\left(a/2\right)^2}=1$$

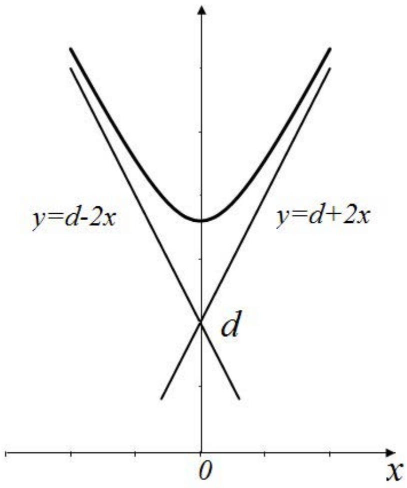


**Рис. 10. Зміна суми відстаней від точки Т до вершин ромба при її віддаленні від початку координат. Прийнято $d_1 = d_2 = d/2$**

Центр гіперболи зміщений на ***d*** одиниць вгору, півосі дорівнюють ***a*** (вздовж осі OY) та ***a/2*** (вздовж осі OX).

Функція приймає найменше значення d + α (сума діагоналей) при *x*=0. Графік має асимптоти *y=d+2x*. При віддаленні точки T від початку координат сума відстаней до вершин ромба зростає майже пропорційно *2x*. Функція приймає найбільше значення при *x=±d/2* :

$$F_{\max} = \sqrt{a^2 + d^2} + d$$

Тангенс кута нахилу асимптоти для функції (11) вдвічі більший, ніж для функції (1). При відхиленні точки від оптимальної сума відстаней до вершин ромба зростає вдвічі швидше, ніж для трикутника. Це необхідно враховувати при розгляді прикладних задач, наприклад мінімізації транспортної роботи. При відхиленні точки звезення від оптимальної точки Ферма-Торрічеллі об'єм транспортної роботи для чотирьох заданих точок зростає вдвічі швидше, ніж для трьох.

Запропонована схема дозволяє дослідити випадок нерівнозважених вершин ромба. Нехай $Q_C = Q_B = Q_D = Q$ ; $Q_A = K \cdot Q$. Тоді

$$F(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + K\,(d_1 - x) + (d_2 + x) \qquad (12)$$

Прирівнявши похідну до нуля, знаходимо

$$x = \frac{a \cdot (K-1)}{2\sqrt{4 - (K-1)^2}} \qquad (13)$$

При К = 1, знаходимо х = 0 (точка перетину діагоналей),

при К = 2; $x = \cdot a \cdot \sqrt{3} / 6$ (як для трикутника СВА при рівнозважених вершинах).

Якщо К→3; *x* →∞. Вершина А може бути оптимальною точкою звезення при довільному віддаленні ($d_1$). Знаходимо значення К, при якому вершина А буде оптимальною:

$$K = 1 + \frac{2d_1}{\sqrt{d_1^2 + \frac{a^2}{4}}} \qquad (14)$$

Очевидно, що завжди $K < 3$, але $K \to 3$ при $d_1 \to \infty$.

Вершина ромба може бути оптимальною точкою при менш ніж трикратному перевищенні об'єму перевезень з цієї вершини.

При $d_1 = a/2$ ; $K = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$

При $d_1 = a$ ; $K = 1 + 4/\sqrt{5} \approx 2,79$

В подальшому планується дослідження для більшої кількості точок (n>4)

**Висновки та напрямок подальших досліджень**.

Геометрична задача знаходження оптимальної точки Ферма-Торрічеллі має велике прикладне значення і застосовується в багатьох практичних задачах. Наведений аналіз історії задачі показує, що протягом XVII-XIX століть були одержані та обґрунтовані геометричні методи для трьох та чотирьох точок (тільки рівнозважених).

Запропонований метод вибору системи координат дозволяє знайти координати точки Ферма-Торрічеллі як для рівнозважених, так і різнозважених точок (для n=3 та n=4). Це дозволило провести дослідження характеру зміни об'єму транспортної роботи, встановити умови, при яких одна із заданих точок буде оптимальною.

В подальшому планується провести більш детальне дослідження для різного виду трикутників та чотирикутників, розглянути багатокутники при n>4.

**Список літератури:**

1. Дослідження техніко-економічних показників гірничодобувних підприємств України та ефективності їх роботи в умовах змінної кон'юнктури світового ринку залізорудної сировини : монографія / Є. К. Бабець, І. Є. Мельникова, С. Я. Гребенюк, С. П. Лобов; за ред. Є. К. Бабця; НДГРІ ДВНЗ «КНУ». – Кривий Ріг : Вид. Р. А. Козлов, 2015. 391 с.

2. Плотников О. В. Економічні оцінки залізорудних родовищ у фінансових та інвестиційних проектах. Кривий Ріг: Мінерал, 2006. 274 с.

3. Vilkul Y., Slobodyanyuk V., Maximov I. Optimization of location and performance parameters for the crushing and transfer stations in the deep open pit mines Sustainable Extractionand Processing of Raw Materials Journal, Publishing House "St. Ivan Rilski", Sofia, 2021 Volume 2 , 74-79

4. Максимова І.І., Слободянюк Р.В. Особливості визначення раціонального положення перевантажувального пункту. *Матеріали 11-ї міжнародної науково-практичної конференції «Перспективи розвитку будівельних технологій»*. Дніпропетровськ: НГУ. 2017. С. 43-47.

5. Kupitz, Ya. S. The Fermat–Torricelli Problem, Part I: A Discrete Gradient-Method Approach / Ya. S. Kupitz, H. Martini, M. Spirova. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2013. Vol. 158, No. 2. P. 305-327.

6. Krarup, J.; Roos, K. On the Fermat point of a triangle. Nieuw Arch. Voor Wiskd. 2017, 5, 280–286

7. Geometric Methods and Optimization Problems, Kluwer, Dordrecht, 1999, 429 pp.

8. Hajja, M. A complete analytical treatment of the weighted Fermat–Torricelli point for a triangle / M. Hajja, A. Zachos. *Journal of Geometry*. 2017. Vol. 108, No. 1. P. 99-110.

9. Courant R., Robbins H., Stewart I. What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods 2nd ed. – Oxford University Press, 1996. – 588 p.

10. Максимов І.І., Слободянюк В.К., Максимова І.І. Особливості визначення координат точки Ферма-Торрічеллі для рівнобедрених трикутників. Міжнародний науковий журнал «Інтернаука». 2023. № 8. https://doi.org/10.25313/2520-2057-2023-8-8855

**Maksymov I.I., Slobodyanyuk V.K., Maksymova I.I.** **ANALYTICAL DETERMINATION OF FERMAT-TORRICELLI POINT COORDINATES AND MINIMIZATION OF TRANSPORT WORK**

*In mathematics, the Fermat-Torricelli point provides the minimum distance to the top of the triangle. A universal analytical formula for determining the Fermat-Torricelli point coordinates for a free convex polygon has not been found at the present moment. However, the solution can be obtained for symmetric polygons.*

*This work aims to develop a methodological basis for determining the coordinates of the point of the minimum transport work and to study the influence of the location of the polygon vertices on this point.*

*The article provides an overview of modern research in which algorithms using the Fermat-Torricelli point are used to minimize logistics processes. Methods of mathematical optimization and analytical geometry are used in the work.*

*Analytical geometry methods have established formulas for determining the coordinates of the optimal transportation point for the number of points n=3 and n=4.*

*For the needs of many branches of science and technology, developing a method that allows predicting the effect of unbalanced points on the position of the point that ensures a minimum of transport work is of practical importance. An example of such a problem is the search for the optimal location of a processing plant, to which of several points the same (balanced points) or different (unbalanced points) volume of raw materials is delivered. At the same time, the volume of transport work for raw material delivery is minimized. It is shown that the center of gravity does not always coincide with the Fermat-Torricelli point but can be used only as a preliminary solution to the problem.*

*For unbalanced points, there are no geometric methods of solution. However, the method offered in this paper allows for finding the optimal point coordinates for both equally weighted and unbalanced points. In addition, a study was conducted on the change in the volume of transport work when the pickup point deviates from the optimal Fermat-Torricelli point, which is impossible to do with geometric methods. The research established the conditions under which one of the unbalanced points will be optimal.*

***Key words:*** *Fermat-Torricelli point, coordinates of the optimal point, minimization of transport work, unbalanced vertices, center of gravity.*